147. $(\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$ ノ一證明ニ就テ

稲 垣　　武 (北大)

$(\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$ ノ証明ハ多クノ書ニ掲ゲテアルガ，コノ証明ノ途中デ二重系列ト單一系列トノ對應ヲ付ケナケレバナラナイ。（例ヘバ H. Hahn. *Reelle Funktionen* I. p. 342 參照）。二重系列ト單一系列トノ對應ニハ一般ニ *diagonales Schema* ト *dyadisches Schema* トニヨル方法ガ用ヒラレテヰルガ前者ノ方ガヨク知ラレテヰル様ニ思ヘル。

解析集合論デハ何レカト云ヘバ *realistisch* ナ証明ヲ要求スルガ，コヽデ *diagonales Schema* ニヨル方法ヲ用ヒ、ソノ一証明ヲ考ヘテ見タ。

Lemma I. Kヲ任意ノ自然數トスルトキ

$$K = [l, m]$$

但シ $$[l, m] = \frac{(l+m-1)(l+m-2)}{2} + l$$

l, m ハ共ニ自然數.

ナル l, m ガ一意ニ定マル。

證明; $$K \geq \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

ヲ滿足スル正, 整數ノ最大ナル解 x ヲ求メル。

コノ x ニ對シテ

i) $K = \dfrac{(x-1)(x-2)}{2}$ ナルトキハ

$$l = x-2, \quad m = 1$$

ii) $K > \dfrac{(x-1)(x-2)}{2}$ ナルトキハ

$$l = K - \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \qquad m = x - l$$

ト定メル. 斯クスレバ K ト $[l, m]$ トノ間ニハ一對一ノ對應ガ付ク。 Q.E.D.

Lemma 2. 二重系列

$$(A)\begin{cases} \binom{n_1}{a_{11}}\ \binom{n_1}{a_{11}\,a_{12}}\ \binom{n_1}{a_{11}\,a_{12}\,a_{13}} \cdots\cdots \\ \binom{n_2}{a_{21}}\ \binom{n_2}{a_{21}\,a_{22}}\ \binom{n_2}{a_{21}\,a_{22}\,a_{23}} \cdots\cdots \\ \binom{n_3}{a_{31}}\ \binom{n_3}{a_{31}\,a_{32}}\ \binom{n_3}{a_{31}\,a_{32}\,a_{33}} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ト單一系列 $\pi = (p_1\ p_2 \cdots\cdots p_K \cdots\cdots)$

トノ間ニハ次ノ如キ関係デ一對一ノ對應ガ付ク。

(A) ヨリ　$\pi=(p_1\,p_2 \cdots\cdots p_k \cdots\cdots)$ ヲ得ルニハ

$K=[p,q]$ トオケバ

$p_k=a_{p,q}$　　但シ $q\neq 1$.

$p_k=[n_p, a_{p,q}]$　但シ　$q=1$.

$\pi=(p_1\,p_2 \cdots\cdots p_k \cdots\cdots)$ ヨリ (A) ヲ得ルニハ

$[p,q]=K$ ナル p, q ニ對シテ

$a_{p,q}=p_k$　　但シ $q\neq 1$

$$\left.\begin{array}{l} n_p=p \\ a_{p,q}=1 \end{array}\right\}\quad \text{但シ } q=1$$

證明；　(A) ナル二重系列ハ明カニ次ノ二重系列ト一對一ノ對應ガツク。

$$(B)\left\{\begin{array}{l}\binom{n_1}{a_{11}}\binom{0}{a_{12}}\binom{0}{a_{13}}\cdots\cdots\cdots \\[2ex] \binom{n_2}{a_{21}}\binom{0}{a_{22}}\binom{0}{a_{23}}\cdots\cdots\cdots \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

次ニ二重系列

$$(C)\left\{\begin{array}{l}\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{1}{3}\cdots\cdots \\[2ex] \binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{2}{3}\cdots\cdots \\[2ex] \binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}\cdots\cdots \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

ヲ考ヘル．(C) ヲ對角線的方法デ番号ヲ附シ並ベル。(B) モ

ホ對角線的方法デ番号ヲ附シ並ベルト、$K=[p,1]$ 番目ノミガ $\binom{n_p}{a_{p,1}}$ トナリ、他ハ $\binom{0}{a_{p,q}}$ ナル形トナル。$\binom{n_p}{a_{p,1}}$ ノ項ヲ (C) ヨリ求メ、ソノ配列ノ番号ヲ p_K トスル。$\binom{0}{a_{p,q}}$ ニ對シテハ $p_K=a_{p,q}$ トオク。

カクシテ系列 (B) ヨリ單一系列 $\pi=(p_1\,p_2\cdots\cdots p_K)\cdots\cdots$ ヲ得ル。

即チ $K=[p,q]$ トオケバ

$$q\neq 1 \quad \text{ナラバ} \quad p_K=a_{p,q}$$

$$q=1 \quad \text{ナラバ} \quad p_K=[n_p,a_{p,1}]$$

逆ニ $\pi=(p_1\,p_2\cdots\cdots p_K\cdots\cdots)$ ヨリ (B) ヲ得ルニハ

Lemma 1. ヨリ $K=[p,q]$ ナル p,q ヲ求メル, 然シテ

$$q\neq 1 \quad \text{ナラバ} \quad a_{p,q}=p_K$$

$$q=1 \quad \text{ナラバ} \quad \begin{cases} n_p=p \\ a_{p,1}=1 \end{cases}$$

トオケバヨイ。從ツテ二重系列 (A) ト單一系列 $\pi=(p_1\,p_2\cdots p_K\cdots)$ トハ一對一ノ對應ガ付ク。 Q.E.D.

定理1. $(\mathfrak{M}_A)_A=\mathfrak{M}_A$

證明： $\mathfrak{M}_A\leq(\mathfrak{M}_A)_A$ ハ明カナル故

$\mathfrak{M}_A\supseteq(\mathfrak{M}_A)_A$ ヲ示セバ充分デアル。

$E\in(\mathfrak{M}_A)_A$ トオクト

$$(1)\qquad E=\sum_{\nu}\prod_{K=1}^{\infty}N_{n_1,n_2\cdots\cdots n_K}$$

ココニ $N_{n_1,n_2\cdots\cdots n_K}\in\mathfrak{M}_A$

$$(2)\quad \therefore\quad N_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} = \sum_{\alpha} \prod_{K'=1}^{\infty} M^{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K}_{a_1 a_2 \cdots\cdots a_{K'}}$$

ココ＝ $M^{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K}_{a_1 a_2 \cdots\cdots a_{K'}} \in \mathfrak{M}$.

$$\therefore\quad E = \sum_{\nu} N_{n_1} N_{n_1 n_2} \cdots\cdots N_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} \cdots\cdots$$

$$= \sum_{\nu} \Big(\sum_{\alpha_1} M^{n_1}_{a_{11}} \cdot M^{n_1}_{a_{11} a_{12}} \cdots\cdots \Big) \Big(\sum_{\alpha_2} M^{n_1 n_2}_{a_{21}} \cdot M^{n_1 n_2}_{a_{21} a_{22}} \cdots\cdots \Big) \cdots\cdots$$

$$= \sum_{\nu, \alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots} M^{n_1}_{a_{11}} M^{n_1}_{a_{11} a_{12}} M^{n_1}_{a_{11} a_{12} a_{13}} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots M^{n_1 n_2}_{a_{21}} \cdot M^{n_1 n_2}_{a_{21} a_{22}} \cdot M^{n_1 n_2}_{a_{21} a_{22} a_{23}} \cdots\cdots$$

従ッテ添數ノ二重系列

$$\begin{cases} \binom{n_1}{a_{11}} \binom{n_1}{a_{11} a_{12}} \cdots\cdots \\ \binom{n_2}{a_{21}} \binom{n_2}{a_{21} a_{22}} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ガ定マル。*Lemma* 2 ニヨリ．コノ系列ニハ一ツノ系列 $\pi = (p_1 p_2 \cdots\cdots p_K \cdots\cdots)$ ガ對應シテ

$$(3)\qquad E = \sum_{\pi} M_{p_1} \cdot M_{p_1 p_2} \cdot M_{p_1 p_2 p_3} \cdots\cdots M_{p_1 p_2 \cdots\cdots p_K} \cdots\cdots$$

ココ＝ $M_{p_1 p_2 \cdots\cdots p_K} \in \mathfrak{M}$.

$$(4)\qquad \therefore\quad E \leq \mathfrak{M}_A.$$

$$\therefore\quad (\mathfrak{M}_A)_A \leq \mathfrak{M}_A. \qquad\qquad Q.E.D.$$

上ノ定理ト仝様ノコトハ *ensemble d'unicite* ニ就テモ成立スルカラ，ココニ示シテオカウ。

定理2. $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$.

証明: コノ場合モ $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ ノ存在ヲ假定スレバ

$$\mathfrak{M} \leq \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$$

ハ明カナル故 $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) \leq \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ ヲ示セバ充分デアル。

$E \in \mathfrak{U}\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ トスレバ

定理1ノ (1) 式及ビ (2) 式デ

$$\prod_{K=1}^{\infty} N_{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} \cdot N_{n_1' n_2' \cdots\cdots n_K'} = 0, \quad (n_1 n_2 \cdots\cdots n_K \cdots\cdots) \neq (n_1' n_2' \cdots n_K' \cdots)$$

$$\prod_{K'=1}^{\infty} M_{l_1 l_2 \cdots\cdots l_{K'}}^{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} \cdot M_{l_1' l_2' \cdots\cdots l_K'}^{n_1 n_2 \cdots\cdots n_K} = 0,$$

$$(l_1 l_2 \cdots l_K \cdots\cdots) \neq (l_1' l_2' \cdots l_K' \cdots\cdots)$$

ナル條件が満足サレテヰル。従ッテ定理1, (3) 式デ

$\pi = (p_1 p_2 \cdots\cdots p_K \cdots\cdots)$ が異ナレバ $\nu = (n_1, n_2, \cdots\cdots n_K \cdots\cdots)$

が異ナルカラ明カニ次式が成立スル。

$$\prod_{K=1}^{\infty} M_{p_1 p_2 \cdots\cdots p_K} \cdot M_{p_1' p_2' \cdots\cdots p_K'} = 0,$$

$$(p_1 p_2 \cdots\cdots p_K \cdots\cdots) \neq (p_1' p_2' \cdots\cdots p_K' \cdots\cdots)$$

従ッテ (4) 式トシテハ

$$E \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$$

$$\therefore \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) \leq \mathfrak{U}(\mathfrak{M}) \qquad Q.E.D.$$